FACULTAD DE INGENIERIA
MONTEVIDEO

PUBLICACIÓN N.° 7 (1942)
DEL INSTITUTO DE ELECTROTÉCNICA

Serie: Textos y complementos
Grupo: Medidas eléctricas



Galvanómetros de cuerda y de bucle

POR

S. GERSZONOWICZ



MONTEVIDEO
R. O. DEL URUGUAY
OCTUBRE, 1942

Publicaciones del Instituto de Electrotécnica

Trabajos aparecidos en 1938 y 1939: un folleto de 95 págs., 23 x 27 cm.

SUMARIO:

S. Gerszonowicz — Historia de la enseñanza de la electrotécnica en la Facultad de Ingeniería de Montevideo.
Lista de los trabajos relativos a electrotécnica, publicados en el Uruguay hasta 1939 incluído.
A. Cisa — Sobre calentamiento de dinamos.
D. Maggiolo Campos — Influencia del "écrouissage" por tracción sobre la permeabilidad de un acero dulce.
S. Gerszonowicz — Los nuevos Laboratorios del Instituto de Electrotécnica.
S. Gerszonowicz — Nota sobre la elección de la cuarta unidad fundamental en electrotécnica.
J. S. Young — Influencia de las condiciones de funcionamiento sobre las características de las lámparas de incandescencia.
S. Gerszonowicz — Sobre la determinación directa y semidirecta de la resistencia crítica de los galvanómetros.
S. Gerszonowicz — Estudio del retorno al cero de los galvanómetros.
D. Maggiolo de Gerszonowicz y S. Gerszonowicz. — Expresión analítica aproximada de la curva Sq (R) del balístico y su aplicación a algunas medidas rápidas.
S. Gerszonowicz — Sobre la cuarta unidad.
Colaboración de **E. Brylinski** — Sobre los sistemas de unidades de medida.

Publicaciones, serie textos y complementos.

1940:

N.° 1 — **S. Gerszonowicz** — Galvanómetros: definición, propiedades generales, estudio del movimiento. Un folleto de 56 págs. 16 x 23 cm.
N.° 2 — **S. Gerszonowicz** — Galvanómetros de imán y cuadro móvil para corriente continua. Un folleto de 88 págs. 16 x 23 cm.

1941:

N.° 3 — **S. Gerszonowicz** — Galvanómetro balístico. Fluxímetro. Un folleto de 56 págs. 16 x 23 cm.
N.° 4 — **S. Gerszonowicz** — Determinación experimental de las constantes y características del galvanómetro de cuadro móvil. Un folleto de 40 págs. 16 x 23 cm.

1942:

N.° 5—**S. Gerszonowicz**—Galvanómetro de resonancia. Un folleto de 46 págs. 16 x 23 cm.

(Continúa)

Por todo lo relacionado con estas publicaciones dirigirse al Director del Instituto de Electrotécnica, Facultad de Ingeniería, calle Cerrito 73, Montevideo, R. O. del Uruguay.

Publicaciones del "Instituto de Electrotécnica"

Montevideo, 1942

Galvanómetros de cuerda y de bucle.

POR

Prof. S. GERSZONOWICZ

1. Principio de los galvanómetros de cuerda. Sensibilidad en intensidad. — Según el vocabulario electrotécnico internacional, el galvanómetro de cuerda o de vibración es un "galvanómetro cuya parte móvil está constituída por un hilo que puede vibrar entre las piezas polares de un imán o de un electroimán". Vamos a precisar el principio de funcionamiento del aparato y hallar su sensibilidad.

Sea *ab* (fig. 1) un hilo conductor de metal no magnético, sin rigidez y tenso, vertical, de longitud *Y*, de muy pequeña sección. El hilo, recorrido por una corriente *I*, está colocado en un campo magnético uniforme dirigido normalmente al plano de la figura, en el sentido del lector hacia la figura, para precisar las ideas. Se suponen fijos los extremos *a* y *b*. Designemos por **B** al vector inducción del campo; de acuerdo con la ley de *Laplace*, sobre un elemento $MM' = dl$ del hilo se ejerce la fuerza

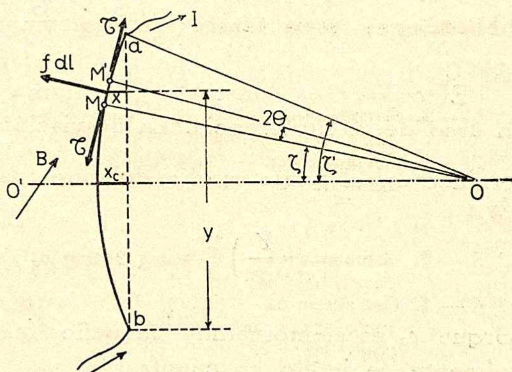


Fig. 1

$$\mathbf{dF} = I\,\mathbf{dl} \wedge \mathbf{B} \qquad (1)$$

o sea, por unidad de longitud

$$f = \frac{dF}{dl} = BI \qquad (2)$$

dirigida en cada punto normalmente al hilo.

Supondremos despreciable la acción de la gravedad; por consiguiente la componente tangencial f_t de las fuerzas repartidas que obran sobre el hilo es nula y la tensión $\mathfrak{T}$ del hilo es constante, de acuerdo con la relación

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dl} = -f_t = o$$

Designemos por 2Θ el ángulo infinitamente pequeño formado por MO y $M'O$, normales al hilo en M y M'. El elemento MM' se encuentra en equilibrio bajo la acción de las tensiones $\mathfrak{T}$ y de la fuerza electromagnética $f\,dl$. La proyección de esas tres fuerzas sobre la bisectriz del ángulo MOM' da

$$f dl = 2\mathfrak{T}\ sen\ \Theta \cong \mathfrak{T}.\,2\,\Theta = \mathfrak{T}\,\frac{dl}{r} \qquad (3)$$

llamando r al radio de curvatura del elemento MM'. Se deduce

$$r = \frac{\mathfrak{T}}{f} = \frac{\mathfrak{T}}{BI} \qquad (4)$$

El radio r es constante y la figura de equilibrio del hilo es un arco de circunferencia. La desviación máxima, o flecha, x_c, se produce en el punto medio del hilo, para $y = \frac{Y}{2}$. Resulta

$$\left(\frac{Y}{2}\right)^2 = x_c\,(2r - x_c) \cong 2\,r\,x_c \qquad (5)$$

porque x_c es siempre muy pequeño frente a $2r$. Se obtiene finalmente, teniendo en cuenta (4)

$$x_c = \frac{Y^2}{8r} = \frac{BY^2}{8\mathfrak{T}}\,I \qquad (6)$$

La desviación de un elemento cualquiera, MM', de ordenada y, se obtiene fácilmente. En efecto (fig. 1)

$$x = x_c\,\frac{cos\,\zeta - cos\,\zeta'}{1 - cos\,\zeta'} \cong 4\;x_c\left(\frac{y}{Y} - \frac{y^2}{Y^2}\right) \qquad (7)$$

observando que ζ', y a fortiori ζ, son lo suficientemente pequeñas como para poner $\cos \zeta' = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \zeta'$ Se ve que las aproximaciones hechas permiten confundir el arco de circunferencia con un arco de parábola.

A partir de la relación (6) se define la sensibilidad en intensidad en corriente continua del aparato

$$S_i = \frac{x_c}{I} = \frac{BY^2}{8\mathfrak{T}} \qquad (8)$$

La flecha x_c se observa generalmente con un microscopio; si G es el aumento, la desviación observada es $d = Gx_c$, y se puede definir la sensibilidad práctica en ampere en corriente continua

$$S_A = \frac{I}{d} = \frac{8\mathfrak{T}}{BY^2G} \qquad (8a)$$

Puede emplearse también la sensibilidad práctica por microampere $S_{\mu A^{-1}} = \frac{10^{-6}}{S_A}$.

Para observar el movimiento de la cuerda hay que prever aberturas en las piezas polares; el campo real no es uniforme. Pero las conclusiones del estudio teórico, en el que el campo se supone uniforme, son en general prácticamente válidas (ver el parágrafo 5).

2. Pulsaciones ideales de la cuerda. — La ecuación del movimiento propio de la cuerda considerada en el parágrafo precedente, vibrando transversalmente en el plano xy, es, en ausencia de amortiguamiento

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \mathfrak{T} \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \qquad (9)$$

donde m es la masa de la unidad de longitud del hilo; se supone que m y $\mathfrak{T}$ son constantes. Las pulsaciones y los períodos ideales son

$$w_{on} = \frac{2\pi}{T_{on}} = \frac{n\pi}{Y} \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{m}} \qquad (10)$$

donde n es un entero. El período T_{o1} ($n = 1$) es el fundamental; los otros son armónicos.

En un punto de ordenada y, la desviación x de la cuerda oscilando libremente es

$$x = \sum_1^\infty P_n \, sen\,(w_{on} t + \varphi_n)\, sen \frac{n \pi y}{Y} \qquad (11)$$

Las constantes P_n y φ_n están determinadas por las condiciones iniciales.

En realidad el amortiguamiento no es nulo y estudiaremos más a fondo el movimiento propio teniéndolo en cuenta Pero antes vamos a ver, siempre dentro de la hipótesis de la ausencia de amortiguamiento, el interesante caso de la cuerda inmóvil en los extremos, con una masa M en su centro. Ya hemos observado publicación N.° 5, 24 que éste es el caso del galvanómetro de resonancia de *Duddell*, con la diferencia de que en este último hay dos cuerdas vibrantes paralelas, cuyos movimientos, en oposición, imprimen una rotación a un espejo fijo en el centro. El mismo estudio puede también servir de introducción al del galvanómetro de resonancia de *Moll*, que examinaremos más adelante, en el parágrafo 9.

Las pulsaciones propias ideales w_{on} están dadas por las raíces de la ecuación (1)

$$tg\, w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathcal{T}}} = \frac{m Y}{4 M} \frac{1}{w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathcal{T}}}} \qquad (12)$$

La ecuación (12) debe ser resuelta gráficamente, pero si la masa total del hilo, $m\,Y$, es pequeña frente a la masa M del espejo, la hipérbola $\frac{mY}{4M} \frac{1}{w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathcal{T}}}} \left(w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathcal{T}}} \right)$ se aproxima a los ejes y el primer punto en que corta a $tg\, w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathcal{T}}} \left(w_{on} \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{m}{\mathcal{T}}} \right)$

(1) El lector comparará útilmente el movimiento propio de la cuerda con las oscilaciones eléctricas de las líneas con constantes repartidas, encontrando fácilmente las ecuaciones eléctricas análogas a las (9)-(15), (21) y (26). Así por ejemplo la relación (12) se comparará con las $tg\, w_{on} \sqrt{C\,L} = \frac{L}{L'} \frac{1}{w_{on} \sqrt{C\,L}}$ y $tg\, w_{on} \sqrt{C\,L} = \frac{C}{C'} \frac{1}{w_{on} \sqrt{C\,L}}$ que dan las pulsaciones ideales de una línea larga de capacidad total C y de coeficiente de self-inducción total L, respectivamente aislada en un extremo y cerrada sobre una self concentrada L' en el otro, o en cortocircuito en un extremo y cerrada sobre una capacidad concentrada C' en el otro. Se consultará p. ej. J. Fallou: "Les réseaux de transmission d'énergie".

cae en la región donde se puede confundir la tangente con el arco, de manera que se deduce, a partir de la relación (12)

$$w_{o1} = \frac{2\pi}{T_{o1}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{MY}} \qquad (13)$$

Los otros puntos de intersección de las dos curvas están bastante cerca del eje de abscisas, es decir, de los puntos de abscisas π, 2π, ... $n\pi$, siendo pues

$$w_{o(n+1)} = \frac{2\pi}{T_{o(n+1)}} \cong \frac{2n\pi}{Y}\sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{m}} \qquad (14)$$

Este resultado podría entreverse a priori: una masa M suficientemente importante reduce la desviación en el centro, y en el límite cada mitad del hilo se encuentra en las condiciones del hilo entero precedente, a saber, inmovilizado en los extremos. Pero además está la vibración a baja frecuencia correspondiente a la masa concentrada M y a la fuerza directriz $\frac{\mathfrak{T}}{Y}$ por desviación unidad.

3. Amortiguamiento. Régimen transitorio en corriente continua.— Supongamos que el término debido al amortiguamiento sea de la forma $A_o \frac{dx}{dt}$, con $A_o = Cte$; la ecuación de movimiento se escribe:

$$m \frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + A_o \frac{\delta x}{\delta t} = \mathfrak{T} \frac{\delta^2 x}{\delta y^2} \qquad (15)$$

Para encontrar los pseudo períodos del movimiento y su grado de amortiguamiento, recordemos que la solución es de la forma

$$\mathbf{x} = x_m e^{\mathbf{h}t} \qquad (16)$$

con

$$\mathbf{h} = -b + j b'' \qquad (17)$$

pudiendo b'' ser real o imaginario. Resulta pues

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dy^2} = \left(\frac{m}{\mathfrak{T}}\mathbf{h}^2 + \frac{A_o}{\mathfrak{T}}\mathbf{h}\right)\mathbf{x} = \mathbf{k}^2\mathbf{x} \qquad (18)$$

Hagamos

$$\mathbf{k} = k_1 + j k_2 \qquad (19)$$

de manera que, identificando en (18)

$$\left.\begin{aligned} k_1^{\,2} - k_2^{\,2} &= \frac{m}{\mathfrak{T}} (b^2 - b''^2) - \frac{A_o}{\mathfrak{T}} b \\ 2\, k_1\, k_2 &= (A_o - 2\, m\, b) \frac{b''}{\mathfrak{T}} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

La solución de (18) es

$$x = Q_1\, e^{\mathrm{k}\, y} + Q_2\, e^{-\mathrm{k}\, y} \quad (21)$$

y, estando la cuerda inmovilizada en los dos extremos, se debe cumplir

$$\left\{\begin{aligned} o &= Q_1 + Q_2 \\ o &= Q_1\, e^{\mathrm{k}Y} + Q_2\, e^{-\mathrm{k}Y} \end{aligned}\right.$$

o sea

$$Sh\, \mathrm{k}\, Y = o \quad (22)$$

lo que implica

$$k_1 = o\, ; \quad k_2\, Y = n\, \pi \quad (23)$$

donde n es un entero. Las ecuaciones (20) dan inmediatamente

$$b = \frac{A_o}{2\, m} = \alpha_{o1}\, w_{o1} = \alpha_{on}\, w_{on} \quad (24)$$

$$b''^{\,2}_n = \frac{n^2 \pi^2}{Y^2 \frac{m}{\mathfrak{T}}} - b^2 = n^2 w_{o1}^{\,2} \left[1 - \left(\frac{\alpha_{o1}}{n} \right)^2 \right] = w_{on}^{\,2} (1 - \alpha_{on}^{\,2}) \quad (25)$$

Cuando $b = o$, se vuelve a encontrar la oscilación no amortiguada indicada en el parágrafo precedente. Obsérvese que $\alpha_{on} = \frac{\alpha_{o1}}{n}$.

Basta considerar $\alpha_{o1} < 1$; el régimen propio de cada oscilación es sinusoidal amortiguado. Se tiene

$$x = e^{-bt} \sum_1^{\infty} P_n\, sen\, (b''_n\, t + \varphi_n)\, sen\, \frac{n \pi y}{Y} =$$

$$= e^{-\alpha_{on}\, n\, \tau} \sum_1^{\infty} P_n\, sen (n\tau \sqrt{1 - \alpha_{on}^{\,2}} + \varphi_n)\ sen\, \frac{n \pi y}{Y} \quad (26)$$

haciendo

$$\tau = w_{o1}\, t \quad (27)$$

Consideremos el importante caso de la supresión brusca de una corriente constante en el circuito de la cuerda. El móvil parte del reposo en equilibrio forzado: $t = 0$, $x = x_f$, $\frac{\delta x}{\delta t} = 0$. El nuevo régimen forzado es

$$x = 0 \qquad \frac{\delta x}{\delta t} = 0$$

Las condiciones iniciales del régimen libre para un elemento $M M'$ cualquiera, de ordenada y, están definidas por

$$0 + (x)_{t=0} = x_f$$

$$0 + \left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)_{t=0} = 0$$

o sea

$$(x)_{t=0} = x_f \qquad \left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)_{t=0} = 0 \tag{27}$$

La relación (26) da por consiguiente, en el instante inicial

$$x_f = \sum_{1}^{\infty} P_n \, sen \, \varphi_n \, sen \frac{n \pi y}{Y} \tag{28}$$

y a partir de su derivada respecto al tiempo, siempre en el instante inicial

$$\sum_{1}^{\infty} b''_n P_n \cos \varphi_n \, sen \frac{n \pi y}{Y} = b \sum_{1}^{\infty} P_n \, sen \, \varphi_n \, sen \frac{n \pi y}{Y} \tag{29}$$

Para determinar $P_n \, sen \, \varphi_n$ multipliquemos los dos miembros de la ecuación (28) por $sen \frac{n \pi y}{Y} dy$ e integremos entre 0 e Y.

Resulta

$$\int_0^Y x_f \, sen \frac{n \pi y}{Y} dy = P_n \, sen \, \varphi_n \int_0^Y sen^2 \frac{n \pi y}{Y} dy$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=\infty} \int_0^Y P_m \, sen \, \varphi_m \, sen \frac{m \pi y}{Y} sen \frac{n \pi y}{Y} dy$$

donde m es un entero diferente de n. Se deduce evidentemente

$$P_n \, sen \, \varphi_n = \frac{2}{Y} \int_0^Y x_f \, sen \frac{n \pi y}{Y} dy \tag{30}$$

donde x_f es función de y y está dada por la relación (7). Reemplazando en (30) x_f por su valor e integrando, resulta

$$P_n \; sen \; \varphi_n = \frac{16}{n^3 \pi^3} \left[1 - (-1)^n \right] x_{cf} \qquad (31)$$

De (29), multiplicando los dos miembros por $sen \frac{n \pi y}{Y} dy$ e integrando entre 0 e Y

$$P_n \cos \varphi_n = \frac{b}{b''_n} P_n \; sen \; \varphi_n \qquad (32)$$

o sea, finalmente

$$P_n = \frac{16}{n^3 \pi^3} \left[1 - (-1)^n \right] \sqrt{1 + \frac{b^2}{b''^2_n}} \; x_{cf} =$$

$$= \frac{16}{n^3 \pi^3} \left[1 - (-1)^n \right] \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_{on}^2}} x_{cf} \qquad (33)$$

$$tg \; \varphi_n = \frac{b''_n}{b} = \frac{\sqrt{1 - \alpha_{on}^2}}{\alpha_{on}} \qquad (34)$$

Se deducen dos conclusiones importantes

1) las armónicas pares desaparecen: para $n = 2h$, h entero, $P_{2h} = 0$, resultado evidente a priori en razón de la simetría de la figura de equilibrio de la cuerda desviada con respecto al eje $O O'$ (fig. 1)

2) las amplitudes de las armónicas impares decrecen en razón inversa al cubo de su orden, siendo la de la armónica 3 sólo 3,7 °/₀ de la amplitud de la fundamental. Se deduce que prácticamente se puede hacer abstracción de los términos armónicos, reduciendo así el estudio del aparato con un número teóricamente infinito de pseudo - períodos propios al del galvanómetro de pseudo - período propio único, es decir, colocándonos en el caso estudiado en la publicación N.° 1. La ecuación del movimiento propio, considerando el elemento central del hilo, que es el que se observa, se obtiene haciendo en (26) $\frac{y}{Y} = \frac{1}{2}$, y es

$$x_c = \frac{32}{\pi^3} x_{cf} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_{o1}^2}} e^{-\alpha_{o1} \tau} sen \left(\sqrt{1 - \alpha_{o1}^2} \, \tau + \varphi_1 \right) - \right.$$

$$- \frac{1}{27\sqrt{1-\alpha_{o3}^2}} e^{-\alpha_{o3} 3\tau} sen(\sqrt{1-\alpha_{o3}^2}\, 3\tau + \varphi_3)$$

$$\left. + \frac{1}{125\sqrt{1-\alpha_{o5}^2}} e^{-\alpha_{o5} 5\tau} sen(\sqrt{1-\alpha_{o5}^2}\, 5\tau + \varphi_5) \ldots . \right] \qquad (35)$$

o sea, con cierta aproximación

$$\frac{x_c}{x_{cf}} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_{o1}^2}} e^{-\alpha_{o1}\tau} sen(\sqrt{1-\alpha_{o1}^2}\,\tau + \varphi_1) \qquad (36)$$

relación idéntica a la (113) de la publicación N.° 1.

Podemos pues aplicar también aquí los resultados del estudio hecho en la publicación N.° 1: en particular, si el amortiguamiento es conveniente y el período ideal es suficientemente pequeño, el aparato puede servir para registrar las variaciones bruscas de una corriente que no se sucedan demasiado rápidamente, sirviendo así de oscilógrafo. Los errores de registro debidos al aparato en sí se estudiarán en detalle en otro lugar, pero observemos aquí que el galvanómetro de cuerda presta grandes servicios en los estudios fisiológicos, donde toma el nombre de electrocardiógrafo. Para estudiar fenómenos de período bastante mayor que T_{o1}, tales como los latidos del corazón, la gran sensibilidad del galvanómetro de cuerda comparada con la de otros oscilógrafos, es una gran ventaja.

Provisto de dispositivos especiales, el aparato puede también servir de oscilógrafo aún para frecuencias tan elevadas como 10^4 Hz.

El amortiguamiento se debe a los frotamientos del aire, y en circuito cerrado, a las fuerzas electromagnéticas; en realidad existe también algún amortiguamiento por histéresis elástica. Vamos a examinar el término debido a las fuerzas electromagnéticas. Consideremos, para simplificar, la cuerda vibrando alrededor de su posición de equilibrio al suprimir la corriente constante producida por una fuente exterior. Supondremos cerrado el circuito de la cuerda; sea R su resistencia total. Volvamos al elemento MM' de la fig. 1. La f.e.m. inducida en él es

$$e = -B\,dl\,\frac{dx}{dt} = -4B\,\frac{dx_c}{dt}\left(\frac{y}{Y} - \frac{y^2}{Y^2}\right) dy \qquad (37)$$

teniendo en cuenta (7) y confundiendo dy con dl.

La integración da

$$E = -4B \frac{dx_c}{dt} \int_0^Y \left(\frac{y}{Y} - \frac{y^2}{Y^2} \right) dy = -\frac{2}{3} BY \frac{dx_c}{dt} \qquad (38)$$

Despreciando los efectos de la self-inducción, la corriente inducida es $i = \frac{E}{R}$ y la fuerza unitaria de amortiguamiento es

$$f_a = \frac{2}{3} \frac{B^2 Y}{R} \frac{dx_c}{dt} \qquad (39)$$

El amortiguamiento debido al aire es frecuentemente bastante enérgico; si la cuerda está poco tensa se obtiene fácilmente un amortiguamiento de la oscilación fundamental próximo y aún superior al crítico. En ciertos aparatos el amortiguamiento electromagnético es notable y puede regularse con ayuda de un shunt.

4. Estudio de la sensibilidad en intensidad del galvanómetro de cuerda. — La expresión (8a) de la sensibilidad práctica en ampere puede escribirse, teniendo en cuenta (10)

$$S_A = \frac{32m}{BG} \frac{1}{T_{o1}{}^2} \qquad (40)$$

Se ve que a igualdad de período ideal y de dispositivo de lectura hay interés, para disminuir S_A, en aumentar B y reducir m. Será pues preferible elegir hilos de densidad pequeña y lo más finos que permita la resistencia mecánica. Desde este punto de vista los hilos de cuarzo son particularmente interesantes; pero no siendo el cuarzo conductor, hay que depositar sobre la superficie de la fibra una capa metálica, p. ej. de oro. Tienen el inconveniente de poseer una resistencia propia elevada; R_g es función del espesor del depósito y de la naturaleza del metal depositado y está comprendida entre 1000 y 10000 Ω aproximadamente.

Los hilos de cuarzo se estiran hasta obtener alrededor de $2\,\mu$m de diámetro.

Entre los hilos metálicos, mucho más conductores que los anteriores, es ventajoso el aluminio a causa de su pequeña densidad y de que puede estirarse hasta $2\,\mu$m de diámetro, pero desgraciadamente sólo puede soportar tensiones mecánicas muy pequeñas,

porque presenta el fenómeno de escurrimiento bajo carga constante. Se emplean mucho el platino, el oro y el cobre; el platino tiene el inconveniente de poseer una susceptibilidad magnética elevada, lo que obliga a un centrado muy exacto para que las fuerzas magnéticas no desvíen la fibra normalmente al plano de la fig. 1 provocando el desenfoque. Estas fuerzas de atracción magnética exigen que la fibra esté exenta de impurezas ferromagnéticas y que se la proteja, así como a las caras del entrehierro, contra todo depósito de polvo.

La resistencia de los hilos metálicos está generalmente comprendida entre 10 y 150 Ω.

El aumento de la inducción B (se pasa de 20000 gauss) tiene el inconveniente de aumentar la potencia de excitación. En particular hay que cuidarse del calentamiento, porque a causa de la diferencia entre las dilataciones de la cuerda y de su soporte, la tensión de la fibra, y por consiguiente la sensibilidad del aparato, pueden variar en forma notable durante la medida. Además, con la inducción aumenta la atracción de las piezas polares, que puede alcanzar valores muy considerables, provocando así cierta dificultad de construcción, ya que el aparato prácticamente no se debe deformar cuando se excita el electroimán. Es claro que a igualdad de inducción hay interés en reducir lo más posible el entrehierro, disminuyendo así la fuerza magnetomotriz necesaria y con ella la potencia de excitación. Pero con el entrehierro estrecho es más difícil obtener un campo uniforme en el espacio en que se desplaza la fibra en su movimiento y por consiguiente la independencia de la sensibilidad en intensidad del valor de la corriente. El espesor del entrehierro está generalmente comprendido entre 0,5 y 2 mm.

En los aparatos más sensibles, la sensibilidad práctica en intensidad alcanza valores tan elevados como 10^{-11} A con un aumento del orden de 1000. pero en general los galvanómetros de cuerda son menos sensibles que los de cuadro móvil.

En la elección de un aparato hay que tener en cuenta, además de la sensibilidad práctica en intensidad, el período ideal, el amortiguamiento y la resistencia de la cuerda. Para "facilitar" la elección se introduce a veces la noción de la "sensibilidad normal" o del "factor de mérito" (ver la publicación N.° 2, III, 11) también para los galvanómetros de cuerda. Así, en un catálogo se indican los

valores aproximados del "factor de mérito" del galvanómetro de cuerda, calculados grosso-modo por la relación

$$S_n = S\mu A^{-1} \left(\frac{10}{T_o} \right)^2 R_g^{-2/5} \quad (41)$$

que ha sido establecida (fórmula (43) de la publicación N.° 2, **III, 11**) para los galvanómetros de imán móvil. Ya observamos oportunamente que dicha noción sólo podía presentar interés, y aún restringido, en la época en que el galvanómetro de imán era el único empleado, pero creemos deber subrayar todavía que en nuestra opinión el cálculo del "factor de mérito" del galvanómetro de cuerda por la fórmula del galvanómetro de imán no tiene sentido. En efecto, la relación (40) se puede escribir

$$S\mu A^{-1} = \frac{BG}{32} \frac{1}{\varrho \delta l} T_{o1}^2 R_g \, 10^{-6} \quad (42)$$

eliminando m e introduciendo $R_g = \varrho \frac{l}{s} = \varrho \frac{\delta l}{m}$. La fórmula (42) demuestra que para fibras *del mismo metal y de la misma longitud*, la sensibilidad aumenta como R_g y no como $R_g^{2/5}$; para las fibras de cuarzo no parece posible introducir una relación entre la masa total y la resistencia del depósito. Cuando se cambian las bobinas en los galvanómetros de imán, éstas son siempre de cobre y de las mismas dimensiones y la relación (41) tiene cierto campo de aplicación, mientras que si se quiere a todo precio introducir un factor de mérito para el galvanómetro de cuerda, hay que limitarse a las cuerdas metálicas del mismo metal y de la misma longitud, y escribir en (41) R_g^{-1} en lugar de $R_g^{-2/5}$. Se ve que tal noción no tiene interés.

Se puede también aumentar S_i, pero aumentando al mismo tiempo el período, dando mayor longitud a la cuerda. En el primer aparato de este tipo, debido a *Ader*, donde el campo era pequeño, la cuerda tenía 1 m de longitud; en los aparatos modernos la longitud está comprendida aproximadamente entre 6 y 15 cm.

La sensibilidad y el período pueden regularse entre ciertos límites, obrando sobre la tensión del hilo; es ésta una de las ventajas del aparato.

Hay que observar que cuando la tensión del hilo se hace pequeña, o sea cuando se exige al aparato su mayor sensibilidad, no

son despreciables ni la acción de la gravedad ni la rigidez. La teoría que precede no se aplica más y se puede constatar que la desviación del galvanómetro cesa de ser proporcional a la corriente, al menos en cierta zona. Con pequeñas tensiones se pueden también observar irregularidades en el enfoque de la fibra, debidas generalmente a tensiones internas.

5. Galvanómetro de Einthoven y similares. — El galvanómetro de cuerda, debido a *Ader*, ha sido perfeccionado por *Einthoven*, que le dió (a menos de perfeccionamientos de detalle) su forma actual (fig. 2).

La fibra *a b* puede estar encerrada en una cajita estanca, provista de ventanas de vidrio o de mica para permitir la observación. La regulación de la tensión se hace por medio de tornillos, impidiendo un tope que la tensión exceda de cierto valor; otros tornillos permiten centrar la fibra. El empleo de la cajita hace más fácil el cambio de la fibra y asegura su protección, pero estas ventajas no deben hacerse a costa del dispositivo de centrado, que se suprime a veces por falta de espacio. Los aparatos sin cajita deben estar cubiertos para proteger la fibra, en particular contra el depósito de polvo

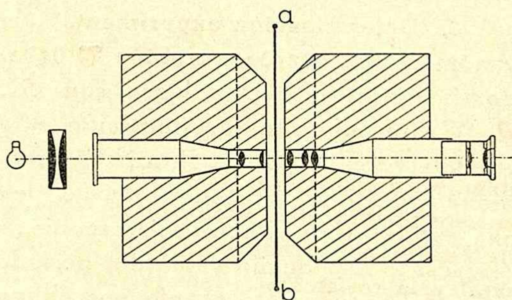


Fig. 2

En los modelos más sensibles el campo se debe a un electroimán que trabaja en la zona de saturación para que una pequeña variación de la corriente de excitación no modifique prácticamente la inducción en el entrehierro. En los modelos menos sensibles se emplea un poderoso imán permanente; así el aparato se puede transportar más fácilmente.

En los núcleos polares se practican canales cilíndricos coaxiales, cuyo eje corta la cuerda en su punto medio, que sirven para la observación o el registro del movimiento de aquella, y que contienen condensores y el microscopio. El ajuste de este último debe ser particularmente cuidadoso, para reducir, en el caso de estar el aparato sometido a vibraciones, el atraso en su movimien-

to sobre el de la fibra. El dispositivo óptico varía según que la observación se haga directamente, o proyectando la cuerda sobre una pantalla, o inscribiendo el movimiento del punto medio de la cuerda.

Debido a la presencia de los canales, el campo deja de ser uniforme a lo largo de la fibra, como supusimos en el estudio teórico anterior. Pero la perturbación es limitada: con un canal cuya abertura en el entrehierro es $1/u$ de la altura de los polos, la disminución de la sensibilidad es sólo $1/u^2$ respecto a lo que se tendría con polos macizos (*Williams*); así para el valor corriente de $u = 6$, dicha disminución es de $\sim 3\,\%$.

Se construyen también modelos con dos fibras paralelas, de regulación independiente, que permiten el registro de dos fenómenos simultáneos.

6. Determinación experimental de las características del galvanómetro de cuerda a tensión $\mathcal{T}$ dada. — Las características que nos interesan en primer lugar son S_A, T_{o1}, α_{o1} y eventualmente R_c. En principio la determinación es análoga a la que estudiamos en detalle en la publicación N.° 4 para los galvanómetros de cuadro móvil. Pero la lectura de las desviaciones no se hace sobre una escala, sino con un microscopio, y la precisión es menor. A causa del pequeño valor del período ideal fundamental, el estudio del movimiento propio nos obliga a efectuar un registro. Estas no son las únicas diferencias: hay que estudiar también la acción de las armónicas del movimiento, que pueden ocasionar errores suplementarios y disminuyen la precisión de las medidas.

1) *Determinación de T_{o1} y de α_{o1}.* El movimiento propio registrado es poliarmónico amortiguado, y la medida directa del tiempo transcurrido entre dos elongaciones sucesivas y de su relación sólo dará $T_{o1}/2$ y $k_1 = e^{\lambda_1}$ si en los instantes en que se producen esas elongaciones ya se han extingido prácticamente las armónicas. Vamos a considerar el problema más a fondo (ver también la publicación N.° 1, **I, 10**).

Sea $\frac{x_c}{x_{cf}} = \frac{1}{s}$ la menor fracción de la desviación inicial total x_{cf}, que se puede observar sobre el registro. La amplitud inicial de la armónica de orden n es $\frac{x_{cf}}{f(n)}$, y el número p_n de elongaciones observables de esta armónica está dado por

$$\frac{x_{cf}}{f(n)} k_n^{-p_n} = \frac{x_{cf}}{s}$$

donde k_n es la relación entre dos elongaciones sucesivas de la oscilación armónica considerada; recordemos que

$$log_e k_n = \lambda_n = \frac{\pi \alpha_{on}}{\sqrt{1 - \alpha_{on}^2}}$$

Se deduce

$$p_n = \frac{log_e \frac{s}{f(n)}}{log_e k_n} = \frac{\sqrt{1 - \alpha_{on}^2}}{\pi \alpha_{on}} log_e \frac{s}{f(n)} \qquad (43)$$

La oscilación armónica de orden n se puede pues observar durante

$$\tau' = w_{ol} \frac{p_n T_n}{2} = w_{ol} \frac{p_n \pi}{b''_n} = \frac{p_n \pi}{n \sqrt{1 - \alpha_{on}^2}} \qquad (44)$$

Considerando las elongaciones posteriores a τ' no hay que tener en cuenta la armónica de orden n; a este efecto basta dejar transcurrir un número de elongaciones igual a

$$q = \frac{\tau'}{w_{ol} T_l /2} = \frac{p_n}{n} \sqrt{\frac{1 - \alpha_{ol}^2}{1 - \alpha_{on}^2}} = p_n \sqrt{\frac{1 - \alpha_{ol}^2}{n^2 - \alpha_{ol}^2}} \qquad (45)$$

Admitiendo que la figura de equilibrio de la cuerda recorrida por una corriente constante es un arco de circunferencia, $f(n) = \frac{1{,}033}{n^3}$ y la única oscilación armónica que hay que considerar prácticamente es la correspondiente a $n = 3$. Si hacemos además $s = 100$, se deduce de (43)

$$p_3 = 0{,}43 \frac{\sqrt{9 - \alpha_{ol}^2}}{\alpha_{ol}} \qquad (46)$$

Así, para $\alpha_{ol} \cong 0{,}1$, $p_3 \cong 13$, $\tau' \cong 13{,}5$, $q \cong 5$; midiendo las oscilaciones registradas a partir de la quinta nos independizamos de la influencia de la armónica 3. Pero la amplitud de la primera elongación medida — que es la quinta — no es más que 0,22 de la amplitud total inicial, y por consiguiente la precisión de la medida es pequeña.

Cualquiera que sea la forma de la figura de equilibrio del hilo, será posible darse cuenta del instante en que las armónicas de-

jan de influir, comparando entre sí los valores de k obtenidos a partir de las diferentes elongaciones sucesivas.

Williams observa que shuntando el aparato de modo que $\alpha_1 = 1$, se puede deducir fácilmente T_{o1} a causa de la forma simplificada $\frac{x_c}{x_{cf}} = (1 + \tau) e^{-\tau}$ que toma en este caso la ecuación de la oscilación fundamental del movimiento. La precisión de tal medida está afectada no solamente por la armónica 3, sino también por el hecho de que es imposible apreciar con certeza cuando $\alpha_1 = 1$; si la precisión de la lectura está caracterizada por $s = 100$, ya para $\alpha_1 = 0{,}83$ la segunda elongación no se puede apreciar y el movimiento "parece" aperiódico (ver la publicación N.° I, **I, 10**).

2) *Determinación de la sensibilidad en intensidad.* Esta determinación no requiere ningún comentario especial. Es preciso estudiar la variación de la sensibilidad con la corriente de excitación.

3) *Determinación de la resistencio crítica (o sea de la resistencia del circuito para la cual* $\alpha_1 = 1$). En principio se determina por el método directo o el semi-directo, como en los galvanómetros de cuadro móvil. En el método semi-directo se tendrá en cuenta la influencia de las oscilaciones armónicas, que se acaba de discutir.

4) *Determinación de* m, B *y* A_o. Hay que observar que en movimiento m ya no es la masa por unidad de longitud del hilo, sino una masa mayor, porque el aire de alrededor participa en el movimiento. El aumento es bastante considerable dado el pequeño diámetro de la fibra; además depende de la velocidad del movimiento.

El coeficiente A_o depende igualmente de la velocidad del movimiento, pero según *Williams* $b = \frac{A_o}{2m}$ es sensiblemente constante.

B representa el valor de la inducción del campo uniforme equivalente que sirvió para establecer la teoría, y puede diferir algo de los valores medios en las diversas regiones del entrehierro. Para determinar B se puede colocar en el aparato una fibra metálica de masa m conocida y la relación (40) da B previa medida de S_A y T_{o1}. La fibra en cuestión debe ser tan perfectamente flexible como sea posible y debe ser capaz de soportar tensiones elevadas para colocarse en las condiciones admitidas en el establecimiento de (40). Luego la misma relación sirve para determinar m de la fibra de trabajo.

La relación (24) permite determinar A_o, conocidos α_{ol}, T_{ol} y m.

7. Galvanómetro Moll - Van Dyck. — Este aparato permite efectuar la observación por medio de un rayo luminoso reflejado por un espejo, mucho más cómodamente que con un microscopio.

Sobre la cuerda ab (fig. 3) está soldada una semi-espira ABC de resistencia mucho menor que la de la parte AC de la fibra. Por lo tanto la mayor parte de la corriente a medir atraviesa la semi-espira ABC, que desvía mucho más que la cuerda, lo que ocasiona la rotación del espejo m fijo sobre el bucle. Si despreciamos la desviación de la cuerda ab y la influencia del espejo, el ángulo de rotación Θ está dado por $\Theta = arc\ sen \dfrac{x_c}{d}$, donde $x_c = \dfrac{BY^2}{8\mathfrak{T}}\, I$ y d es la distancia entre las dos cuerdas paralelas. Cuando las desviaciones son suficientemente pequeñas se tiene $S_i = \dfrac{\Theta}{I} = \dfrac{BY^2}{8\mathfrak{T} d}$.

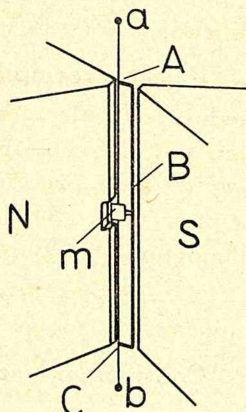


Fig. 3

Como desde el punto de vista del amortiguamiento electromagnético la cuerda se encuentra en corto-circuito, aquel es enérgico, y depende poco de la resistencia del circuito exterior; puede regularse a su valor crítico obrando sobre el campo, que es producido sea por un imán permanente provisto de un shunt magnético, sea por un electroimán El modelo con electroimán tiene cuerdas intercambiables, siendo el período ideal 0,01 o 0,02s. La resistencia interior es pequeña, del orden de 5 - 10 Ω, y la sensibilidad en intensidad es del orden de 5.10^{-7} m.A/mm.

8. Aparato de cuerda como galvanómetro de resonancia — La ecuación de movimiento de un elemento de la cuerda recorrida por una corriente $i = I_m\ sen\ pwt$ (p entero), donde I_m y pw son constantes, es

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + A_o \frac{\partial x}{\partial t} - \mathfrak{T} \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = BI_m\ sen\ pwt = \frac{4\ BI_m}{\pi}\ sen\ pwt \sum_1^{\infty} \frac{1}{n}\ sen \frac{n\pi y}{Y} \quad (47)$$

en virtud de ser $\dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_1^{\infty} \dfrac{1}{n}\ sen \dfrac{n\pi y}{Y} = 1$; n es un entero *impar*.

La solución particular de (47), que representa el régimen forzado, es

$$x = \sum_1^\infty x_{mcn}\, sen\,(pwt - \varphi_n)\, sen\, \frac{n\pi y}{Y} \qquad (48)$$

o sea, en notación compleja

$$x = \sum_1^\infty x_{mcn}\, e^{j(pwt - \varphi_n) + j\frac{n\pi y}{Y}} \qquad (48a)$$

Resulta, reemplazando en (47)

$$-mp^2w^2 \sum_1^\infty x_{mcn}\, e^{-j\varphi_n + j\frac{n\pi y}{Y}} + jA_o\, pw \sum_1^\infty x_{mcn}\, e^{-j\varphi_n + j\frac{n\pi y}{Y}} +$$

$$+ \mathfrak{T} \frac{\pi^2}{Y^2} \sum_1^\infty x_{mcn}\, n^2\, e^{-j\varphi_n + j\frac{n\pi y}{Y}} = BI_m = \frac{4\,BI_m}{\pi} \sum_1^\infty \frac{1}{n}\, e^{j\frac{n\pi y}{Y}} \qquad (49)$$

Consideremos separadamente cada oscilación armónica. Se tiene

$$x_{mcn}\, e^{-j\varphi_n} \left[\mathfrak{T} \frac{\pi^2}{Y^2} n^2 - m\, p^2 w^2 + j\, A_o\, p\, w \right] = \frac{4\,BI_m}{\pi\, n} \qquad (50)$$

de donde, teniendo en cuenta (10) y (24) y haciendo

$$u_{np} = \frac{p\, w}{w_{on}} \qquad (51)$$

$$x_{mcn} = \frac{4\,B\,I_m}{\pi\, n \sqrt{\left(\mathfrak{T} \frac{\pi^2}{Y^2} n^2 - m\, p^2 w^2\right)^2 + A_o{}^2 p^2 w^2}} =$$

$$= \frac{4BY^2 I_m}{\pi^3\, \mathfrak{T}}\; \frac{1}{n^3 \sqrt{(1 - u_{np}{}^2)^2 + 4\, \alpha_{on}{}^2 u_{np}{}^2}} \qquad (52)$$

y

$$\varphi_n = arctg \frac{A_o\, p\, w}{\mathfrak{T} \frac{\pi^2}{Y^2} n^2 - m\, p^2 w^2} = arctg \frac{2\, \alpha_{on}\, u_{np}}{1 - u_{np}{}^2} \qquad (53)$$

Por consiguiente la solución es

$$x = \frac{4BY^2 I_m}{\pi^3\, \mathfrak{T}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^3 \sqrt{(1 - u_{np}{}^2)^2 + 4\, \alpha_{on}{}^2 u_{np}{}^2}} \times$$

$$\times sen\left(pwt - arctg\frac{2\,\alpha_{on}\,u_{np}}{1 - u_{np}^2}\right) sen\frac{n\pi y}{Y} \tag{54}$$

y en el centro $\left(\frac{y}{Y} = \frac{1}{2}\right)$

$$x_c = \frac{4\,BY^2 I_m}{\pi^3\,\mathcal{C}} \sum_1^\infty \frac{sen\frac{n\pi}{2}}{n^3} \frac{1}{\sqrt{(\quad - u_{np}^2)^2 + 4\,\alpha_{on}^2 u_{np}^2}} \times$$

$$\times sen\left(pwt - arctg\frac{2\,\alpha_{on}\,u_{np}}{1 - u_{np}^2}\right) \tag{55}$$

Se verifica inmediatamente que para pw tendiendo a cero, la amplitud de x_c tiende a $\frac{4\,B\,Y^2 I_m}{\pi^3\,\mathcal{C}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\,sen\frac{n\pi}{2} = \frac{B\,Y^2\,I_m}{8\,\mathcal{C}}$: se vuelve a encontrar la relación (6) establecida directamente en el parágrafo 1.

La relación (55) permite discutir el comportamiento del aparato, funcionando a corriente de amplitud constante, de acuerdo con los criterios establecidos en la publicación N.° 5; se ve que para tener una sensibilidad elevada el amortiguamiento debe ser pequeño. Pero el problema es más complicado porque hay una serie de términos para cada armónica p de la corriente que recorre la cuerda.

La observación de la cuerda vibrante con un microscopio es incómoda y se han preferido dispositivos de espejo. El estudio se complica más; así en el aparato de dos cuerdas de *Duddell* descripto en el parágrafo 24 de la publicación N.° 5 las pulsaciones ideales no están determinadas por (10) sino por una relación análoga a (12). Otro tipo de galvanómetro de resonancia de cuerda, con espejo y de una sola cuerda, es el de *Moll*.

9. Galvanómetro de resonancia de Moll. — *Moll* fijó sobre la fibra, asimétricamente, un pequeño espejo; debido a la asimetría el movimiento resultante es de traslación y de rotación, en lugar de ser sólo de traslación. Obrando sobre la tensión de la cuerda se puede regular el período ideal fundamental entre ~ 100 y 2500 Hz, intervalo muy amplio teniendo en cuenta que no hay que cambiar el órgano móvil y que sin embargo se conserva una sensibilidad interesante. La resistencia de la fibra, de tungsteno, es de alrededor de 30 Ω; la sensibilidad a 100 Hz es del orden de 5.10^{-7} m.A/mm.

El campo se produce con un electroimán, de modo que se puede regular cómodamente la sensibilidad en tensión a su valor máximo.

10. Galvanómetros de bucle. — En el primer aparato de este tipo, debido a *Mechau* (fig. 4), una cinta de cobre, de ∼ 1 μm por 0,5 mm de sección, se suspende normalmente a las líneas de fuerza entre los polos de dos imanes permanentes. Estos polos están dispuestos de manera que cuando una corriente i atraviesa el bucle, las fuerzas resultantes f sobre los dos lados verticales están dirigidas en el mismo sentido, y hacen desviar el bucle, en su plano, de la posición de equilibrio (fig. 5). La desviación se observa con un microscopio micrométrico con un aumento de ∼ 80-600, que enfoca el elemento vertical ab previsto a este efecto en el bucle; se puede también observar por proyección. La caja del galvanómetro

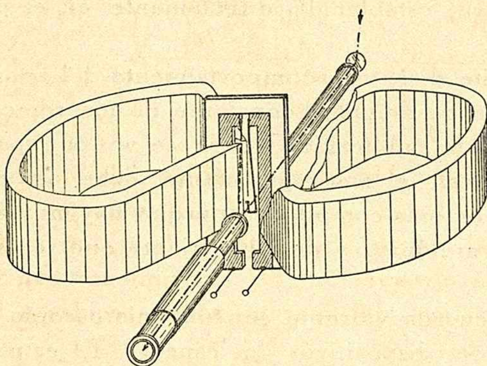


Fig. 4

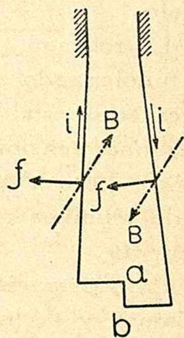


Fig. 5

puede girar alrededor de un eje horizontal; el bucle sufre una rotación de 180°, pasando así de la posición de equilibrio "suspendido" a la posición de equilibrio "apoyado"; la sensibilidad aumenta así unas 5 o 6 veces; en efecto, en la posición suspendida la fuerza directriz de la gravedad se suma a la elástica, mientras que en la posición apoyada se resta. La estabilidad del cero es muy inferior con el bucle apoyado.

Se proteje el bucle encerrándolo en una caja de vidrio de muy pequeño volumen, de manera que el amortiguamiento por los frotamientos del aire es enérgico, próximo al crítico. La caja con su bucle es fácil de cambiar.

La sensibilidad práctica en ampere es $S_A \cong 5.10^{-8}$ A (bucle suspendido) y ∼ 10^{-8} A (bucle apoyado), con un aumento de 640

en los dos casos. Como la resistencia interior es sólo de algunos ohm, la sensibilidad en tensión es elevada; esta propiedad, el pequeño período ideal (del orden de 0,6 s con el bucle apoyado, y de 0,25 s con el bucle suspendido) y el enérgico amortiguamiento hacen que el aparato sea particularmente interesante para ciertas aplicaciones, como por ejemplo, la medida de las fuerzas termoeléctricas, de las corrientes vagabundas, etc.

Se puede también emplear un bucle de hilo de sección circular y mayor. El aparato es menos sensible ($\sim 10^{-5}$ A) pero su período ideal es menor ($\sim$ 0,025 s).

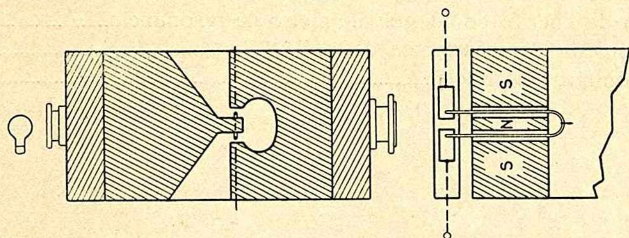


Fig. 6

Se debe a *Deubner* una forma un poco diferente del aparato; el bucle, de aluminio, está colocado en el entrehierro de un imán con polos de forma especial (fig. 6). Se suelda al bucle un índice de cuarzo para permitir la observación del movimiento con un microscopio. Las características del aparato son parecidas a las del galvanómetro de *Mechau*.

INDICE

Págs.

1. Principio de los galvanómetros de cuerda. Sensibilidad en intensidad. 1
2. Pulsaciones ideales de la cuerda 3
3. Amortiguamiento. Régimen transitorio en corriente continua 5
4. Estudio de la sensibilidad en intensidad del galvanómetro de cuerda. 10
5. Galvanómetro de Einthoven y similares 13
6. Determinación experimental de las características del galvanómetro de cuerda a tensión $\mathfrak{T}$ dada 14
7. Galvanómetro Moll-Van Dyck 17
8. Aparato de cuerda como galvanómetro de resonancia 17
9. Galvanómetro de resonancia de Moll 19
10. Galvanómetros de bucle 20

N.° 7 — **S. Gerszonowicz.** — Galvanómetros de cuerda y de bucle. Un folleto de 22 págs. 16 x 23 cm.

Publicaciones, serie laboratorio.

1 9 4 2 :

N.° 6 — **D. Maggiolo de Gerszonowicz** — Prácticas de laboratorio (Medidas eléctricas). Parte **I** (**En prensa**).

LIT. E IMP. DEL COMERCIO
25 DE MAYO 321